SSIS – Lazio IX ciclo A.A. 2007/2008

Corso di Storia della Matematica – prof. Ghione F.

Specializzanda: Guglielmotti Anna

Leonardo Pisano, il *Liber abaci* e la rinascita della matematica in Occidente

"*L'abaco procura un'esperienza multisensoriale; infatti l'abacista vede muoversi le palline, le sente tintinnare quando urtano una contro l'altra, e le percepisce nel suo insieme. Sicuramente non esiste un altro calcolatore digitale che abbia un'attendibilità così alta in proporzione al basso costo di acquisto e di manutenzione*". Martin Gardner

Introduzione

Il punto centrale attorno a cui ruota l'U.D. sarà costituito dal *Liber abaci* di Leonardo Pisano, noto anche come Fibonacci, l'opera attraverso cui tale sistema dal mondo arabo si diffonde nel mondo latino.
La vicenda del passaggio in Occidente del sistema di numerazione indo-arabico offre numerosi spunti di riflessione sulla trasmissione e sull'integrazione del sapere e sul suo intrecciarsi con il contesto socio-economico e il Liber abaci costituisce un eccellente esempio di come culture differenti per collocazione geografica e temporale possano integrarsi per dare origine a una innovazione che diviene patrimonio universale.

Finalità

Oltre all'obiettivo di approfondire la conoscenza del nostro sistema di numerazione, evidenziandone le caratteristiche che lo distinguono dai sistemi precedenti, questa U.D. si propone di illustrare agli studenti come esso sia frutto di un complesso processo storico e come in generale la matematica, spesso percepita come una scienza astratta e compiuta, sia un sapere in evoluzione il cui destino è strettamente congiunto alle vicende storiche. Più in generale questa U.D.si propone di aprire agli studenti una prospettiva storica sul sapere scientifico e, nello specifico, di inquadrare la disciplina matematica in un più ampio contesto culturale, evidenziando il profondo legame di scambio che lega tra loro culture diverse.

Destinatari

<u>Percorso 1</u>: alunni dell'ultimo anno della scuola primaria- alunni di scuola secondaria di I grado
<u>Percorso 2</u>: alunni del biennio della scuola secondaria di II grado

Obiettivi

<u>Percorso 1</u>

- conoscere le origini del nostro sistema di numerazione, ripercorrendo la storia dell'abaco;
- "giocare" con i matematici famosi;

<u>Percorso 2</u>

- approfondire la conoscenza del nostro sistema di numerazione;
- acquisire conoscenze relative alle molteplici connessioni fra eventi storici ed evoluzione delle conoscenze;
- potenziare le conoscenze algebriche e geometriche;

- risolvere quesiti di ”matematica ricreativa”.

Quadro storico

Il nostro sistema di numerazione si diffonde in Europa a partire dal XIII secolo. Fino ad allora si utilizzavano i numeri romani e ci si aiutava con degli strumenti, detti *abachi*[1], nell'esecuzione dei calcoli.
Il nuovo sistema giunge a noi,dagli arabi che a loro volta lo avevano appreso dagli indiani. Per questo viene indicato come *sistema indo-arabico*.
Nel mondo arabo uno dei primi riferimenti al sistema indiano si registra verso il 650 d.C. quando un vescovo siriano, Severus Sebock, accenna in un suo scritto ai nove segni degli Indiani con cui si riesce a scrivere ogni numero.
Nel 772 il califfo Al-Mansur riceve una delegazione di astronomi e studiosi indiani che gli portano in dono un'opera denotata dagli arabi come *Sindhind,* opera astronomica in cui si mostra anche come usando solo nove segni sia possibile scrivere qualunque numero ed eseguire facilmente calcoli. Pochi anni più tardi l'opera viene tradotta in arabo, ma tale versione è andata perduta.
A questa opera attinse probabilmente lo scienziato al-Khuwarizmi, autore - oltre che di numerose opere di astronomia e trattati sull'astrolabio - anche di due opere di aritmetica e di algebra. La prima, scritta attorno all'850 d. C., ci è pervenuta solo in traduzione latina col titolo *De numero indorum*. Qui al-Khuwarizmi dà una esposizione chiara e completa del sistema di numerazione indiano e fu forse per questo che si diffuse l’errata convinzione che il nostro sistema di numerazione sia di origine araba. Inoltre nelle successive traduzioni latine che si diffusero in Europa il sistema di numerazione indiano e degli *algoritmi* per eseguire con essi le varie operazioni, vennero attribuite ad al-Khuwarizmi da lettori poco accurati. Il termine *algoritmo* non è nient'altro che la deformazione del nome di al-Khuwarismi.

Il testo arabo originale più antico per ora rinvenuto in cui si illustra il sistema indiano è l'*Aritmetica* di al-Uqlidisi, il *Kitab al Fusul Fi al-Hisab al-Hindi*, di cui esiste un manoscritto conservato ad Istanbul datato 341, che corrisponde al 952 d.C. Dall'introduzione apprendiamo che l'uso indiano era quello di scrivere i numeri ed eseguire i conti su delle lavagnette su cui era disteso uno strato di sabbia, ma l'autore avverte che la stessa cosa si può fare usando fogli ed inchiostro. Il testo è diviso in quattro libri nel primo dei quali, in ventuno capitoli, si introducono il sistema indiano e le operazioni con interi e frazioni fino all'estrazione di radici. Il primo capitolo si apre con la descrizione di quello che un principiante deve imparare: prima di tutto i nove (e non dieci!) simboli, che si presentano come una delle varianti arabe dei simboli da cui prenderanno la forma definitiva le nostre cifre; successivamente i posti: unità, decine e centinaia da ripetersi in gruppi di tre; poi si deve familiarizzare con i numeri formati da quattro cifre; può accadere che uno dei posti sia ``vuoto'': in questo posto si mette un cerchio che viene detto *sifr* e può trovarsi nel primo,nell'ultimo o in un posto intermedio.

Il nuovo “algoritmo” costituiva un modo alternativo all'abaco per eseguire i calcoli. Gradualmente il nuovo metodo si diffuse nel mondo latino anche se per ancora due secoli abaco e algoritmo convissero e *abaco* viene spesso usato come sinonimo di `` far di conto''. La rivelazione del nuovo algoritmo consisteva nel procedere non più con oggetti materiali, sassolini (dal latino “calculus” da cui deriva il termine calcolo), palline o gettoni, ma con le parole. Si passò a compiere i calcoli usando i nomi stessi dei numeri. Il calcolo cambiò radicalmente natura diventando un calcolo “per iscritto”.
Nel dispositivo costituito dalle colonne dell’abaco, un numero veniva rappresentato da una delle nove cifre disposte nelle colonne per indicare le quantità di unità, decine, centinaia, ecc, che entravano nella composizione. Ad es. per indicare il numero “mille e uno”

[1] Gli abachi più antichi erano tavoli ricoperti da un sottile strato di sabbia sui quali con uno stilo si segnavano i calcoli. Abaco deriva dal latino *abacus* e questa dalla parola greca *abaks* che significa “tavolo” e che deriva probabilmente, a sua volta, dalla parola semitica *abaq* che vuol dire proprio “sabbia” o “polvere”. (fonte : progetto Polymath)

|1| | |1|

Togliendo le sbarre che separano i numeri si otterrebbe 11, se invece i posti vuoti vengono riempiti con piccolo cerchi

|1|0|0|1|

i quali, togliendo le sbarre, impediscono ai due 1 di saldarsi fra loro, si ottiene il numero in questione.

Mentre tracce solo sporadiche iniziavano a fare la loro comparsa anche in Europa, fu solo più tardi che il sistema indo-arabico iniziò ad essere davvero conosciuto ed usato. E ciò avvenne a partire dal XIII secolo. Il contributo fondamentale in questo senso è costituito dall'opera del pisano Leonardo Fibonacci intitolata ***Liber abaci***. Fuori di Italia opere analoghe furono ad esempio quelle composte da Alessandro di Villedieu, il *Carmen de algorismus*, e da Giovanni di Halifax, noto come Sacrobosco, l'*Algorismus vulgaris*.

Leonardo Pisano(1180 circa-1250) è più noto come Fibonacci o “figlio di Bonacci” Suo padre era segretario della Repubblica di Pisa e responsabile a partire dal 1192 del commercio pisano presso la colonia di Bugia, in Algeria. Alcuni anni dopo il 1192, Bonacci portò suo figlio con lui a Bugia. Il padre voleva che Leonardo divenisse un mercante e così provvide alla sua istruzione nelle tecniche del calcolo, specialmente quelle che riguardavano le cifre indo-arabiche, che non erano ancora state introdotte in Europa. In seguito Bonacci si assicurò l’aiuto di suo figlio per portare avanti il commercio della repubblica pisana e lo mandò in viaggio in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza. Leonardo colse l’opportunità offertagli dai suoi viaggi all’estero per studiare e imparare le tecniche matematiche impiegate in queste regioni. Il risultato di questi viaggi e di questi studi sarà nel 1202 la pubblicazione del *Liber Abaci*, seguito ad alcuni anni di distanza dalla *Practica geometriae* (1220), e da alcune altre opere minori per mole, ma non per contenuti: il *Liber quadratorum*, il *Flos*, ambedue pubblicati nel 1225, e l'*Epistola ad magistrum Theodorum*, di data incerta, ma anch'essa composta intorno a quegli anni. Altri scritti, tra cui un *Trattato di minor guisa*, forse una versione ridotta e semplificata del *Liber Abaci*, e un *Commento sul X libro di Euclide*, sono andati perduti.
In tutta la sua produzione l’opera più importante è il "Liber abaci": è un lavoro contenente quasi tutte le conoscenze aritmetiche e algebriche ed ha avuto una funzione fondamentale nello sviluppo della matematica dell’Europa occidentale.
[2]“*Gli indiani* - scrive Fibonacci nel suo libro – *usano nove figure: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 e con queste, assieme al segno 0, che gli arabi chiamano* ***cephirum****, scrivono qualsiasi numero*”. Lo zero era diventato **cephirum** in latino, come traduzione della corrispondente parola araba **sifr**, traduzione a sua volta del termine **sunya** che in sanscrito significa “vuoto”. **Cephirum** o **ciphra** quest’ultimo termine per indicare poi, in italiano, non solo più lo zero, ma qualsiasi *cifra*. Mentre Cephirum diventerà *zefiro*, *zevero* e finalmente, nel dialetto veneto, **zero**:“*Et dovete sapere chel zeuero per se solo non significa nulla* - scriveva Fibonacci - *ma è potentia di fare significare... Et decina o centinaia o migliaia non si puote scrivere senza questo segno 0*”. Se già nel Duecento quindi, lo zero e il sistema di numerazione indo- arabico erano universalmente noti in Europa, dovevano però passare ancora diversi secoli prima di una loro definitiva affermazione.
Il trattato si divide naturalmente in quattro parti. La prima dà i fondamenti dell'aritmetica: Leonardo introduce le cifre indo-arabe e la numerazione posizionale, e insegna gli algoritmi delle operazioni con i numeri interi e con le frazioni. Questa prima parte, che prende i primi sette capitoli, è sviluppata senza alcun riferimento a problemi reali o applicazioni di qualsiasi tipo, ma viene svolta in modo formale e illustrata con una serie di esempi via via più complessi, in modo che il lettore venga introdotto gradualmente ai nuovi numeri e alle operazioni relative.

[2] da “Progetto Polymath” (http://www2.polito.it/didattica/polymath)

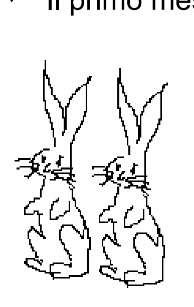
Seguono poi quattro capitoli di matematica mercantile, nei quali vengono affrontati in tutti i loro risvolti i problemi che potevano intervenire nell'esercizio della mercatura: acquisti e vendite, baratti, società, e monete. Qui il lettore che grazie a quanto ha appreso nei capitoli precedenti si è familiarizzato con le operazioni aritmetiche, può metterle alla prova in problemi del suo operare quotidiano, e convincersi così della semplicità del nuovo algoritmo e della sua superiorità rispetto ai più familiari numeri romani.
Ma non di solo commercio vive l'uomo. Il capitolo che segue, di gran lunga il più ampio dell'opera, riguarda una serie di problemi di vario tipo, molti dei quali si riferiscono a situazioni prive di utilità pratica. Accanto a questi e altri problemi di "matematica divertente", troviamo anche alcuni risultati più complessi, come la somma di una progressione aritmetica, e il metodo della falsa posizione, che prelude alla parte finale dell'opera, nella quale si ritorna alla matematica più avanzata.
Il tredicesimo capitolo è dedicato per intero al metodo della doppia falsa posizione, una delle tecniche più potenti dell'aritmetica araba e medievale. Fibonacci ha occasione di dimostrare qui la sua maestria nel trattare i problemi più complessi, che richiedono ripetute applicazioni del metodo.
Infine, nei due ultimi capitoli si passa a questioni sempre più astratte, che comprendono l'estrazione di radici quadrate e cubiche, un piccolo trattato dei binomi che sarebbe poi stato sviluppato nel commento perduto al decimo libro di Euclide, e nel capitolo finale la teoria delle proporzioni geometriche e l'algebra.

Percorso per la scuola del I ciclo(ultimo anno primaria- Secondaria di I grado)

Dopo aver illustrato agli alunni l'origine del nostro sistema di numerazione, ed avendo ben evidenziato il ruolo che arabi ed indiani hanno avuto nell'aver inventato la notazione posizionale,oltre all'introduzione dello "zero", si può spostare l'attenzione sull'ultimo capitolo del "Liber abaci". Esso è tra i più interessanti, in quanto propone esercizi, prevalentemente teorici, che trovano però molte applicazioni pratiche. Uno in particolare ha reso celebre il matematico:

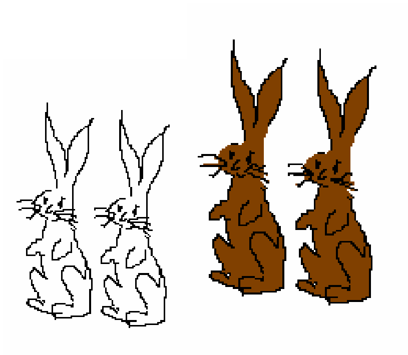
Un tale pose una coppia di conigli in un luogo circondato da ogni parte da pareti. La coppia iniziò a riprodursi a partire dalla fine del primo mese e ogni mese generò una nuova coppia di conigli. Tutte le altre coppie, nate nel corso dell'anno, iniziarono a riprodursi a partire dal secondo mese dopo la nascita e anch'esse generarono una nuova coppia ogni mese, ***quante coppie di conigli nascono complessivamente in un anno?***
Il gioco è semplice è si adatta ad essere proposto anche ad alunni del I ciclo[3] , ricorrendo prima ad una rappresentazione grafica del problema e poi successivamente passando alla fase astratta in cui si formalizza il tutto con la successione aritmetica. Si procede come segue:

- Il primo mese c'è solo una coppia di conigli

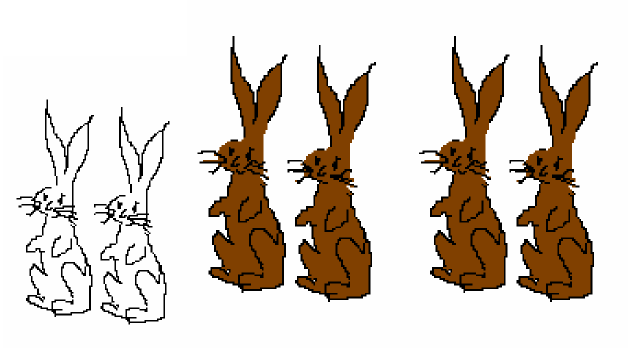


Per diventare adulta ed essere in grado di riprodursi, la coppia impiega un mese, per cui il secondo mese ci sono 2 coppie di conigli, di cui una fertile (che qui rappresentiamo colorata di marrone, mentre la coppia bianca è quella costituita dai conigli più giovani).

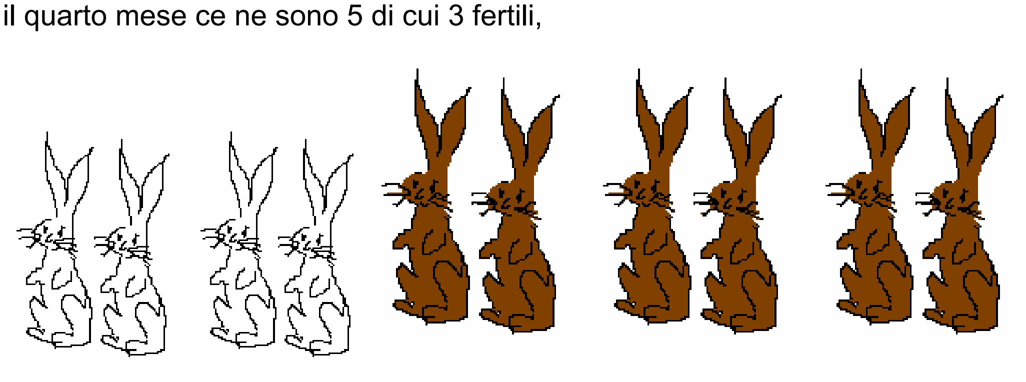
[3] da H.M.Enzensberger – "Il mago dei numeri"- Einaudi



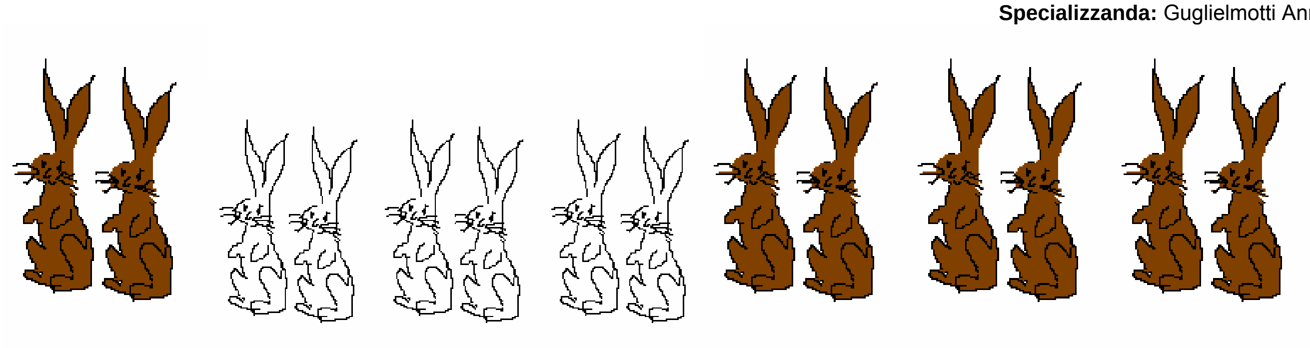
Analogamente il terzo mese ce ne sono 3 di cui 2 fertili;

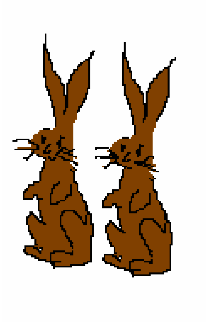


il quarto mese ce ne sono 5 di cui 3 fertili,



il quinto mese ce ne sono 8 di cui 5 fertili





e così via.
A questo punto si può far notare che la sequenza numerica che emerge è costituita da termini in cui ciascuno è la somma dei due precedenti, giungendo così alla celebre **successione di Fibonacci**:

1=1

1 + 1 = 2

1 + 2 = 3

2 + 3 = 5

3 + 5 = 8

e così via , ottenendo i numeri "Bonaccioni"(Cifr. Nota 3):

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

Trascrivendo in una tabella i numeri "Bonaccioni" secondo la successione:

1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0	7^0	8^0	9^0	10^0	11^0	12^0	13^0	…
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	…..

Si può far osservare agli allievi che sommando i primi tre termini e aggiungendo 1 si ottiene il quinto, sommando i primi sei e aggiungendo 1 si ottiene l'ottavo, e così via. Inoltre se si sommano i primi due: 1+1=2 , se ne salta 1 e vi si somma perciò il 4^0, ottenendo:
1+1=2
+ 3

si salta il 5^0 e vi si aggiunge il 6^0 (in sostanza uno si aggiunge e l'altro si salta) si ha:

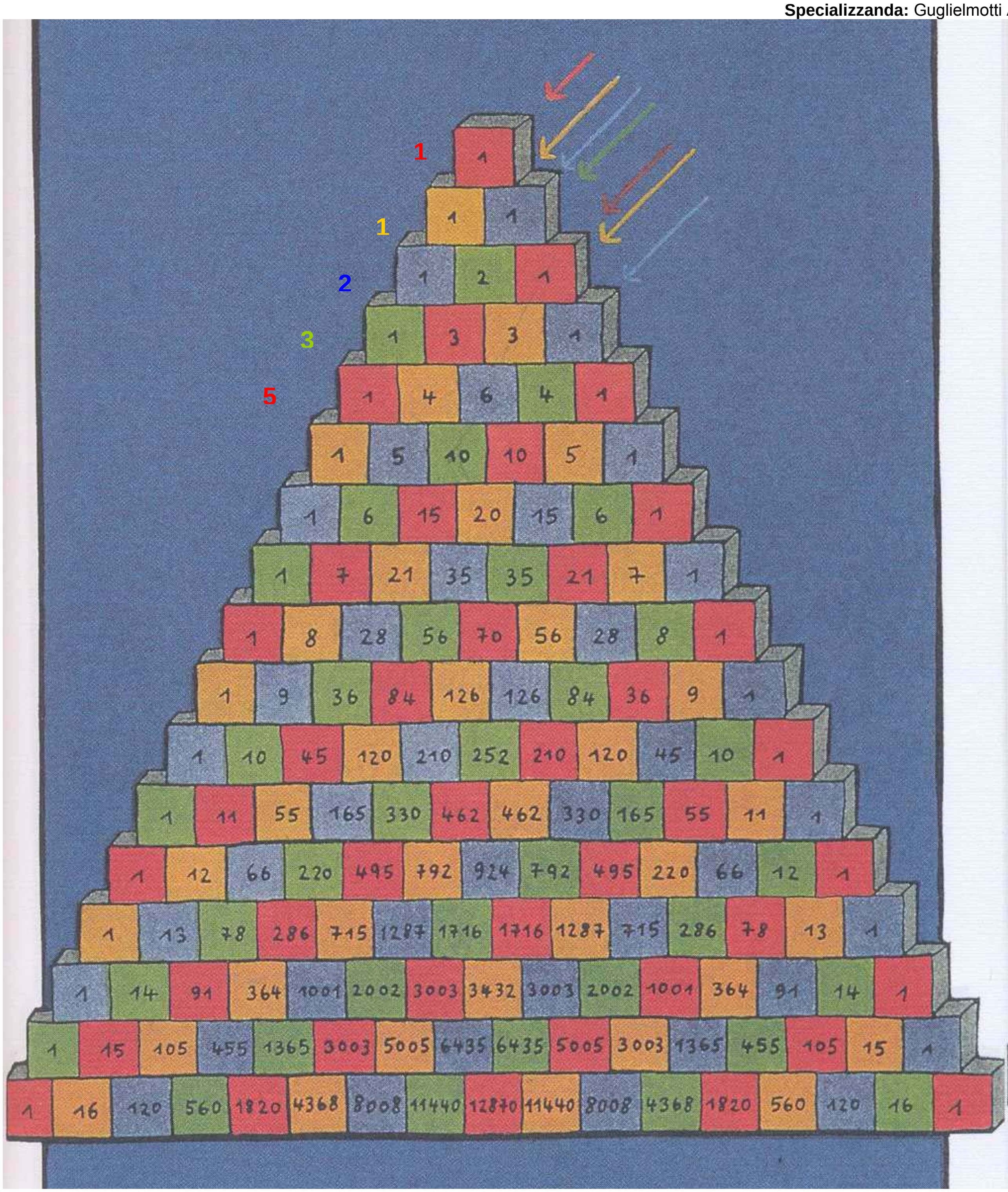
1+1=2
+ 3
+ 8

e ancora:

1+1=2
+ 3
+ 8
+ 21

si osserva che il risultato finale è esattamente 34 ovvero il nono numero Bonaccione. Ancora se si prendono due numeri Bonaccioni qualsiasi, ad esempio il 4^0 e lo si moltiplica per sé stesso e poi lo si somma al 5^0 numero bonaccione moltiplicato per se stesso, si ha: $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$
ovvero ancora un numero Bonaccione, più precisamente il 9^0 in quanto per l'appunto 4 + 5 = 9!.

Suggestiva per gli alunni è anche l'immagine che mette in relazione i numeri Bonaccioni con il triangolo di Tartaglia, di cui si può cogliere l'occasione per parlarne, anticipando ancora un percorso che di solito si affronta nel ciclo successivo della scuola secondaria.



(da "Il mago dei numeri" – H.M. Enzensberger)

Ma la risposta alla domanda iniziale:***quante coppie di conigli nascono complessivamente in un anno?***
Non contando la coppia iniziale che per Fibonacci si riproduce già nel primo mese, le coppie nate in un anno saranno **376**.

Ancora: il massimo comun divisore fra due numeri di Fibonacci è ancora un numero di Fibonacci la cui posizione è data dal MCD fra i loro indici.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Fib(n)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

Ad es. : 1 = MCD(7,9) e MCD(13,34) = 1

Se mettiamo a confronto la successione di Fibonacci con una successione di numeri naturali, noteremo che ad ogni numero di Fibonacci primo corrisponde un indice primo. (con l'eccezione di Fib(3)=4). Non vale il viceversa.

A questo punto l'alunno divertito dai giochini con conigli e numeri Bonaccioni, potrebbe chiedersi a cosa serve tutto ciò. In realtà lo stesso Fibonacci ha dato poca importanza alla sua scoperta, mentre il fascino di questa successione e delle sue innumerevoli proprietà ne ha fatto uno strumento ricorrente in natura, in arte, nelle varie scienze (e si può approfittarne per creare un percorso pluridisciplinare!).
In molte specie vegetali, prime fra tutte le Astaracee (girasoli, margherite, ecc.), il numero dei petali di ogni fiore e' di solito un numero di Fibonacci, come 5, 13, 55. Le brattee delle pigne si dispongono in due serie di spirali dal ramo verso l'esterno - una in senso orario e l'altra in senso antiorario. Le scaglie degli ananas presentano un'aderenza ancora piu' costante ai fenomeni di Fibonacci. I numeri di Fibonacci si trovano anche nella fillotassi, l'ordinamento delle foglie su un gambo. Su molti tipi di alberi le foglie sono allineate secondo uno schema che comprende due numeri di Fibonacci. Partendo da una foglia qualunque, dopo uno, due, tre o cinque giri dalla spirale si trova sempre una foglia allineata con la prima.
Il percorso può condurre gli allievi a soffermarsi su altri semplici quesiti e giochi ricorrenti nel "Liber abaci" [4].

1. *Di due viandanti , uno percorre 20 miglia al giorno, l'altro fa un miglio il primo giorno di viaggio, due il secondo , tre il terzo, e così – sempre aggiungendo un miglio al giorno- si sforza di completare il suo viaggio. Si vuole sapere dopo quanti giorni il secondo raggiungerà il primo.*

Scrive Fibonacci[4]:"moltiplica la metà della moltitudine di tutti i numeri posti nella collezione per la somma degli estremi", ovvero, **S= (n/2)x(n+1)** [5]**.**
Gli alunni possono essere guidati nel ragionamento, facendo osservare che il primo giorno, tra i due uomini la differenza delle distanze percorse è 19 miglia, al secondo giorno essa aumenta di altre 18 miglia. Fino al diciannovesimo giorno la distanza la distanza tra i due uomini continua ad aumentare. Il ventesimo giorno percorrono entrambi 20 miglia. A partire dal 21^0 giorno la distanza comincia a diminuire: di un miglio il primo giorno, di altre due miglia il secondo giorno(22^0 dall'inizio) fino al 39^0, giorno in cui il secondo viaggiatore recupera le ultime 19 miglia di distacco. L'uomo che viaggia a velocità costante avrà percorso complessivamente 39x20 =780 miglia, l'altro avrà percorso 1+2+3+….+38+39 miglia, cioè -applicando la regola di Fibonacci – (1+39)x39/2= 780 miglia raggiungendo il compagno. Il secondo viandante raggiungerà il primo dopo **39** giorni.

[4] Scuola e Didattica – 15 gennaio 2006- Editoriale La Scuola
[5] Questo metodo per calcolare la somma dei primi numeri interi è da molti erroneamente attribuito a Gauss.

2. *C'è un albero il cui (1/4) + (1/3) è nascosto sotto terra e sono 21 palmi. Si chiede qual è l'altezza dell'albero.*

Fibonacci usa questo problema per introdurre "**la comoda falsa posizione**" o "**regula falsi"** ovvero assegniamo al valore cercato, in questo caso l'altezza *h*, una 'falsa posizione', cioè un qualunque numero intero scelto arbitrariamente e valutiamo la proporzione che si ricava da tale 'posizione'**.** Secondo il suo ragionamento: se la lunghezza dell'albero fosse 12 (12 è multiplo di 3 e di 4), un terzo della sua lunghezza sarebbe 4 e un quarto misurerebbe 3, in tutto 7. Fibonacci usa, poi, la "**semplice regola del 3**"- noi diremmo il calcolo del quarto proporzionale-: "Se 12 mi dà 7, quanto mi darà 21?". L'albero è alto **36** palmi.

Percorso per la scuola secondaria di II grado

L'itinerario che si può proporre a studenti di scuola superiore passa attraverso un maggiore rigore formale, per cui sempre prendendo lo spunto dal famoso problema dei conigli, e estendendolo, la successione di Fibonacci può essere definita così:

- i primi 2 elementi sono 1, 1;
- ogni altro elemento è dato dalla somma dei due che lo precedono.

Chiamando Fib(n) la successione di Fibonacci, abbiamo la seguente definizione matematica:

- **Fib(1) = 1**
- **Fib(2) = 1**
- **Fib(n) = Fib(n-2)+Fib(n-1) per n = 3, 4, 5, ...**

In base a questa definizione si assume convenzionalmente **Fib(0) = 0**.
La successione di Fibonacci, dunque, è:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
A questo punto, si possono proporre agli allievi alcuni esercizi risolvibili usando il metodo di induzione matematica:
i) $Fib_1 + Fib_2 + Fib_3 + \ldots + Fib_n = Fib_{n+2} - 1$
ii) $Fib_1 + Fib_3 + Fib_5 + \ldots + Fib_{2n-1} = Fib_{2n}$
iii) $Fib_2 + Fib_4 + Fib_6 + \ldots + Fib_{2n} = Fib_{2n+1} - 1$.

Oppure si può far notare loro che: essendo Fib(n+1)=Fib(n)+Fib(n-1),se dividiamo per *Fib(n)* e poniamo a_n=*Fib(n)/Fib(n-1)*, otteniamo

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

Se ora facciamo crescere il numero *n*, i valori a_n e a_{n+1} si avvicinano sempre più a uno stesso valore γ, che verifica la relazione

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\gamma}$$

una relazione che si può scrivere anche nella forma $\frac{1}{\gamma} = \gamma - 1$. Moltiplicando tutto per γ, otteniamo l'equazione

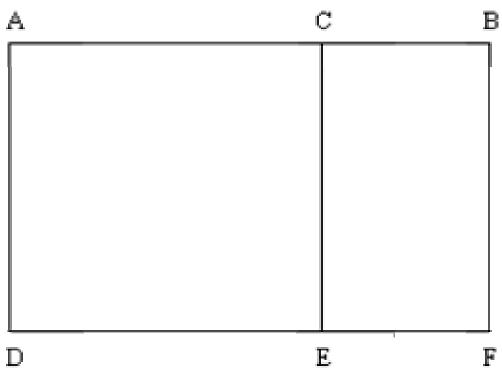
$$\gamma^2 = \gamma + 1$$

la cui soluzione positiva è $\gamma = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Storicamente, il numero γ (o meglio il rapporto che rappresenta) compare per la prima volta negli *Elementi* di Euclide nell'ambito del problema della divisione di un segmento AB in media ed estrema ragione, cioè in due parti tali che AB stia alla parte maggiore AC come questa sta alla minore CB; in formule: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$

Questa relazione è verificata se prendiamo AB=γ ed AC=1. Avremo infatti $CB = \gamma - 1 = \frac{1}{\gamma}$, e quindi i rapporti $\frac{AB}{AC}$ e $\frac{AC}{BC}$ sono ambedue uguali a γ.

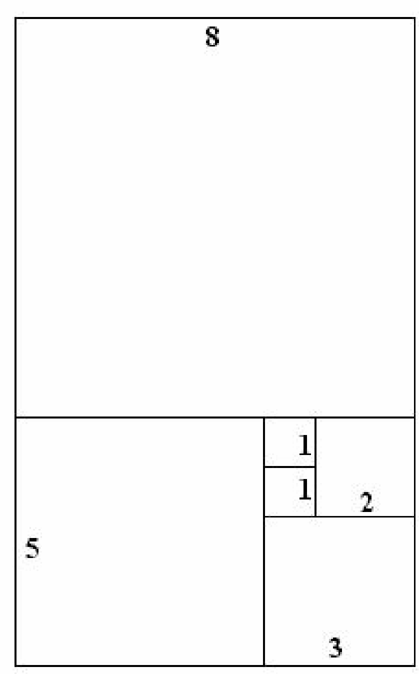
Un altro modo di vedere la relazione precedente è far costruire agli allievi un rettangolo di base γ e altezza 1. Se da esso si taglia il quadrato ACED di lato 1,

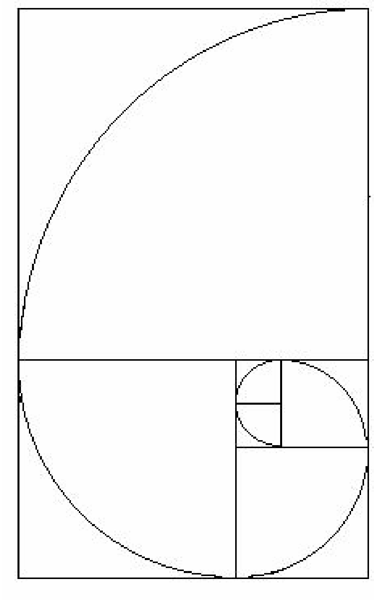


il rettangolo residuo CBFE è simile al rettangolo di partenza. Infatti si ha CE=AC, e dunque $\frac{AB}{AC} = \frac{CE}{CB}$.

Il numero γ è chiamato **sezione aurea,** o numero d'oro.
Numericamente, siccome √5 ≈ 2,2360679774997896964, si ha
γ ≈ 1,6180339887498948204586...

Un'altra situazione, stavolta geometrica, che conduce ai numeri di Fibonacci, è connessa con la costruzione di quadrati adiacenti. Si invitano gli alunni a partire da un quadrato di lato 1, e sul lato di questo si costruisce un secondo quadrato adiacente, anch'esso di lato 1. I due quadrati formeranno un rettangolo 2×1, e quindi il prossimo quadrato adiacente sarà di lato 2. Insieme ai precedenti, questo quadrato formerà un rettangolo 3×2, sul quale poggerà un quadrato di lato 5. Continuando si forma una sequenza di quadrati, i cui lati sono i numeri di Fibonacci successivi 1, 2, 3, 5, 8, 13, ecc. Tracciando in ogni quadrato un quarto di cerchio come nella figura, si ottiene la cosiddetta "spirale di Fibonacci", una forma che si ritrova in certe conchiglie.





Si può proporre agli alunni di risolvere dal "Liber abaci" il quesito 1 visto nel precedente percorso, ponendo l'attenzione sulla somma di una progressione aritmetica; o ancora il seguente:

Due uomini avevano dei denari. Il primo disse al secondo: se mi dessi la terza parte dei tuoi denari, ne avrei 14. E il secondo rispose: e se tu mi dessi la quarta parte dei tuoi, ne avrei 17.

Il problema si riduce al sistema di due equazioni in due incognite

$$x + \frac{y}{3} = 14\,;\quad y + \frac{x}{4} = 17$$

Usando il metodo della "**doppia falsa posizione"**, la soluzione si può trovare così: se si pone *x*=4, la prima equazione dà *y*=30, e inserendo questi valori di *x* e *y* nella seconda si trova il risultato 31, con un errore di 14 rispetto a 17. Se invece si pone *x*=8, si ha *y*=18, e un risultato finale di 20, con un errore di 3. Allora si dirà: se aumentando la posizione di 4 ho diminuito l'errore di 11 (da 14 a 3), quanto dovrò aumentare ancora la mia posizione per diminuire l'errore di altri 3? La risposta è $\frac{3\cdot 4}{11} = 1\cdot\frac{1}{11}$, e dunque si ha $x = 9\cdot\frac{1}{11}$ e di conseguenza $y = 14\cdot\frac{8}{11}$.
Si potrà confrontare il metodo di Fibonacci, che può essere esteso anche ad un sistema di 5 equazioni in 5 incognite, che egli risolve applicando per tre volte consecutive il metodo della "doppia falsa posizione", testimoniando un grande virtuosismo in campo algebrico verbale[6], con i metodi normalmente proposti a scuola per la soluzione di sistemi lineari di equazioni.

[6] Tutti i problemi e i metodi algoritmici proposti da Fibonacci nel *Liber abbaci* sono illustrati solo mediante descrizioni colloquiali, senza mai ricorrere a formule,

Bibliografia

Hans.M. Enzensberger – “Il mago dei numeri” – Einaudi Tascabili
Denis Guedj – “Il teorema del pappagallo” – Tea
Carl. B. Boyer – Storia della Matematica – Oscar Saggi Mondadori
Scuola e didattica – numero 9 del 15 gennaio 2006
www.2.polito.it/didattica/polymath
Il giardino di Archimede - Matematica e commercio nel *Liber Abaci*. – E. Giusti