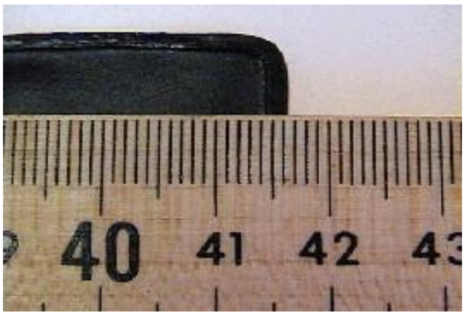
L'incertezza nelle misure

A ogni misura è associata **un'incertezza**, che può essere più o meno grande.
Ogni strumento di misura ha una **sensibilità** e una **portata**. La sensibilità è il più piccolo valore della grandezza che lo strumento può distinguere, mentre la portata è il più grande valore della grandezza che lo strumento può misurare.

Errore assoluto



Con il calibro si può avere la sensibilità di 1/20 mm.

Esempi

- In un righello normale le tacche più piccole corrispondono a 1 mm. Perciò, è impossibile misurare lunghezze più piccole di 1 mm. Ogni misura, dunque, avrà un'incertezza di 1 mm.
- Un foglio A4 misura 29,7*cm* di lunghezza. Se abbiamo misurato il foglio con un righello, l'incertezza è pari ad 1 mm. La lunghezza, dunque, si scrive (29,7±0,1)*cm*.

Errore sistematico

L'errore sistematico si ripete sempre nello stesso modo, o sempre per eccesso o sempre per difetto. Può essere eliminato correggendo opportunamente il valore misurato.

Errore casuale

Gli errori casuali variano in modo imprevedibile da una misura all'altra e influenzano il risultato qualche volta per eccesso, qualche volta per difetto.

Valore medio

Se si fanno diverse misure, si sceglie come risultato della misura il loro **valore medio**, che è il rapporto tra la somma delle misure e il numero di misure.

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots x_n)}{n}$$

valore medio

somma delle misure

numero delle misure

Il risultato di una misura si esprime scrivendo il valore medio più o meno l'errore:

valore medio ± errore

Errore massimo

L'errore massimo è uguale alla differenza tra il valore massimo e il valore minimo divisa per 2

$$e_m = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

Se l'errore massimo è maggiore della sensibilità dello strumento, esso viene presa come errore della misura.

Errore relativo

Si possono avere misure con lo stesso errore assoluto ma precisione molto diversa. Ad esempio, se misuro la lunghezza del pollice della mano (circa 2 cm) e faccio un errore di 1 cm, ho una misura molto grossolana. Ma se faccio lo stesso errore di 1 cm nel misurare l'altezza del Colosseo (circa 50 m), ho una misura molto più precisa. Eppure, l'errore assoluto è identico. Per risolvere questo problema si introduce l'**errore relativo**, pari al rapporto tra l'errore della misura Δl e la misura l della grandezza:

$$\Delta l_{relat} = \frac{\Delta l}{l}$$

L'**errore percentuale** è pari all'errore relativo moltiplicato per 100, e si indica con il segno %.

Esercizio

Quesito: Nove misure diverse della larghezza della cattedra forniscono la seguente serie di risultati: 1.21 m, 1.23 m, 1.20 m, 1.20 m, 1.19 m, 1.24 m, 1.22 m, 1.21 m, 1.21 m. Si determinino la migliore stima per l'esito della misura, l'errore assoluto, l'errore relativo e si riporti il risultato della misura con il corretto numero di cifre significative.

Risposta: La migliore stima è data dal **valor medio** della larghezza della cattedra. Facendo la somma delle nove misure otteniamo 10.91 m. Il valor medio si ottiene dividendo tale risultato per il numero delle misure effettuate, ossia 9. Con una calcolatrice otteniamo il seguente risultato x = 1.21222 m. Per capire quante cifre sono significative dobbiamo andare a calcolare l'errore assoluto. In questo caso l'errore assoluto coincide con **l'errore massimo**:
Δx = (xmax - xmin) / 2 = (1.24 -1.19) m = 0.025 m.
Ora la regola generale afferma che l'errore va sempre arrotondato in modo da tenere un'unica cifra significativa. Seguendo le usuali regole per l'arrotondamento, approssimeremo l'errore per eccesso Δx = 0.03 m. A questo punto anche il valor medio va arrotondato in modo da tenere solo due cifre dopo la virgola. Il risultato della misura diventa pertanto x = (1.21 ± 0.03) m.
Infine per quel che riguarda l'errore relativo dobbiamo dividere l'errore assoluto, 0.03 m, per il risultato della misura, 1.21 m, ottenendo come risultato un errore relativo pari a 0.025. Siccome l'errore relativo è il rapporto tra due lunghezze, l'errore relativo **non** ha unità di misura.

Propagazione degli errori

Spesso in fisica le misure non vengono effettuate per confronto diretto con un campione di riferimento (**misure dirette**) ma utilizzando una formula matematica. Ad esempio, se volessimo misurare il semiperimetro o l'area del banco dovremmo per prima cosa misurare la base b e l'altezza a del banco per poi ricavare il semiperimetro p/2 o l'area A usando le formule p = a + b e A = a · b. Queste misure, ottenute tramite una formula o un'equazione matematica, prendono il nome di **misure indirette**.

È chiaro che sia la misura della base b che quella dell'altezza a sono soggette ad errori che indicheremo con Δb e Δa rispettivamente. La domanda alla quale vogliamo rispondere in questa sezione è: quale errore commettiamo nella misura indiretta del semiperimetro o dell'area?

In generale valgono le seguenti regole:

1. L'errore che commettiamo nella misura della **somma** a + b o nella misura della **differenza** a - b è la somma dei due errori assoluti **Δa + Δb**.
2. L'errore che commettiamo nel prodotto k · a, dove k è una costante priva di errore sperimentale, è dato da **k · Δa.**
3. Nei prodotti e nelle divisioni, a · b e a : b, la regola è più complicata e afferma che vanno sommati gli **errori relativi**. L'errore relativo in una misura a è dato da Δa / a, ossia dal rapporto tra l'errore assoluto Δa commesso nella misura e il valore della misura stessa a. L'errore relativo nei prodotti e nelle divisioni è pertanto dato dalla somma degli errori relativi **Δa / a + Δb / b**.

Le regole trovate sopra possono essere motivate come segue:

1. Consideriamo il caso della somma di due misure (a ± Δa) e (b ± Δb). La migliore stima per la misura è a + b. Il valore massimo è a + b + Δa + Δb. L'errore nella somma è dato dalla differenza tra il valore massimo e la migliore stima. Tale differenza coincide con Δa + Δb, la somma dei due errori. Un analogo discorso vale per la differenza tra a e b. La migliore stima è a - b. Il valore massimo nella differenza si ha quando a è massimo e b è minimo: a + Δa - (b - Δb) = a - b + Δa + Δb. Anche in questo caso l'errore, ossia la differenza tra il valore massimo e la migliore stima, coincide con la somma degli errori Δa + Δb.
2. k · (a ± Δa) = k · a ± k · Δa.
3. Il valore massimo che può assumere il prodotto delle due misure è invece dato dall'espressione (a + Δa) · (b + Δb) = a · b + a · Δb + (Δa) · b + Δa · Δb. Siccome gli errori sono numeri piccoli rispetto alle misure, possiamo trascurare il termine Δa · Δb. L'errore assoluto, ossia la differenza tra il valore massimo e la migliore stima del prodotto a · b, diventa allora a · Δ b + (Δa) · b. Se dividiamo tale risultato per a · b, arriviamo a concludere che l'errore relativo del prodotto a · b è uguale alla somma degli errori relativi Δa / a + Δb / b.

In generale possiamo dire che gli errori nelle misure **si propagano** quando usiamo i risultati delle misure dirette (come la lunghezza e la larghezza del banco) per calcolarci misure indirette come possono essere l'area o il semiperimetro del banco stesso. Ci piace sottolineare anche l'importanza dell'errore relativo in una misura. Esso ci dà un'indicazione quantitativa sulla bontà di una misura. È chiaro infatti che lo stesso errore assoluto, ad esempio 1 mm, commesso nella misura del diametro di un anello o nella distanza Terra-Sole corrisponde a gradi di precisione notevolmente diversi: l'errore relativo nella prima misura è infatti molto più piccolo, ossia la misura del diametro dell'anello è di gran lunga più precisa di quella della distanza Terra-Sole.

Cifre significative
Se y = 6.12, il valore della grandezza è dato con tre cifre significative.
Se y = 6.124, il valore della grandezza è dato con quattro cifre significative.
Il numero di cifre significative è il numero di cifre tra la prima cifra diversa da zero e l'ultima cifra incluse.
Es., 0.0010306 ha cinque cifre significative.
Se il valore deve essere arrotondato per renderlo compatibile con l'incertezza l'ultima cifra significativa viene aumentata di una unità se la successiva è $\geq$ 5.
Se devono essere eseguite operazioni aritmetiche sui valori, l'arrotondamento viene eseguito alla fine delle operazioni.

Esercizio

Quesito: Supponiamo di aver effettuato le misure di due lunghezze e di aver ottenuto come risultato a = (21.3 ± 0.4) m e b = (19.61 ± 0.06) m. Usando le regole di propagazione degli errori si calcolino a + b, a - b, a ·b, a : b, con il corretto numero di cifre significative.

Risposta: L'errore nella somma a + b è dato dalla somma degli errori assoluti Δa + Δb = 0.46 m. Dal momento che l'errore va sempre arrotondato a un'unica cifra significativa arrotonderemo 0.46 per eccesso e l'errore nella somma sarà Δa + Δb = 0.5 m. Perciò la misura a + b = 40.91 m va arrotondata a 40.9 m, in modo tale da tenere un'unica cifra dopo la virgola. Analogo discorso vale per la differenza a - b = 1.69 m che andrà arrotondata per eccesso a 1.7 m.
Il risultato finale è: a + b = (40.9 ± 0.5)m, a - b = (1.7 ± 0.5)m.
Nei prodotti e nei rapporti invece vanno sommati gli errori relativi: Δa / a + Δb / b = 0.0218. Questo è l'errore relativo nel prodotto a · b = 417.693 e nel rapporto a : b = 1.08618.

Per ottenere l'errore assoluto in queste misure dobbiamo moltiplicare l'errore relativo per il risultato della misura indiretta. Nel caso del prodotto l'errore assoluto, arrotondato a una cifra significativa, è $417.693 \cdot 0.0218 = 9\ m^2$. Nel caso del rapporto l'errore assoluto è invece $1.08618 \cdot 0.0218 = 0.02$. Dovremo pertanto tenere tre cifre significative nella misura indiretta sia del prodotto che del rapporto:

$a \cdot b = (418 \pm 9)\ m^2$
$a : b = 1.09 \pm 0.02$.

Esercizi

Es. 1

Un falegname misura la lunghezza di una tavola e afferma che è compresa fra 298 e 302 cm.

- Calcola l'errore assoluto e scrivi il risultato della misura
- L'errore percentuale sulla misura è minore dell'1%. Perché?

Es. 2

Misurando più volte il tempo di oscillazione di un pendolo abbiamo trovato i seguenti valori: 1,02 s; 0,99 s; 1,01 s; 0,98 s.

- Calcola l'errore assoluto, quello relativo e quello percentuale.

Es. 3

Misurando la massa di un mattone abbiamo trovato 2,50 kg con un errore del 4%.

- Calcola l'errore assoluto.