Le equazioni lineari

Perchè bisogna saper risolvere delle equazioni?

Perché le equazioni servono a risolvere dei problemi!

Un problema è una proposizione che richiede di determinare i valori di alcune grandezze (dette "incognite") che abbiano relazioni con altre grandezze (dette "dati") di cui siano noti i valori.

Un problema si dice *possibile* se esistono valori dell'incognita che verificano le condizioni poste. Questo **insieme di valori** si dice soluzione del problema.

1. IDENTITA' ED EQUAZIONI

Consideriamo la seguente uguaglianza

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy.$$

Possiamo facilmente verificare che questa uguaglianza è **SEMPRE VERIFICATA** qualunque valore numerico noi attribuiamo alle lettere **x** ed **y.**
Ad esempio:
se ad **x** diamo il valore di **1** e ad **y** il valore di **2**, avremo:

$$(1+2)^2 = 1^2 + 2^2 + 2\,(1)\,(2)$$

$$3^2 = 1 + 4 + 4$$

$$9 = 9.$$

Potremmo andare avanti a provare a sostituire tutti i valori che vogliamo alla **x** e alla **y** e scoprire che la nostra eguaglianza è sempre verificata.

Ciò è dovuto al fatto che

$$x^2 + y^2 + 2xy$$

non è altro che un modo diverso di scrivere

$$(x+y)^2.$$

Quando una **UGUAGLIANZA** è **SEMPRE VERIFICATA** qualunque siano i valori attributi alle sue lettere, diciamo che quella uguaglianza è una **IDENTITA'.**

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

IDENTITA'

Ora, invece, consideriamo quest'altra uguaglianza:

$$3x = 6.$$

Proviamo a sostituire alla **x** il valore **-1**. Avremo: $3\,(-1) = 6$ ovvero: $-3 = 6$.

Vediamo che l'uguaglianza non viene verificata. Potremmo provare a sostituire alla **x** altri valori, ma è abbastanza intuitivo capire che, solamente se diamo alla **x** il valore **2**, la nostra eguaglianza sarà verificata. Infatti:

$$3\,(2) = 6$$

$$6 = 6.$$

L'**UGUAGLIANZA** tra due **ESPRESSIONI LETTERALI,** che è **VERIFICATA** solo per **PARTICOLARI VALORI** attribuiti alle sue lettere, si dicono **EQUAZIONI**.

Quindi:

$$3x = 6$$

EQUAZIONE

Quindi, ricapitolando:

- quando una **UGUAGLIANZA** è **SEMPRE VERIFICATA** qualunque siano i valori attributi alle sue lettere essa si chiama **IDENTITA'**;
- quando una **UGUAGLIANZA** è **VERIFICATA** solo per **PARTICOLARI VALORI** attribuiti alle sue lettere si chiama **EQUAZIONE**.

A tali lettere si dà il nome di **INCOGNITE**.

Esempio:

$$4\,x = 12.$$

L'incognita è la x.

I **VALORI** che attributi alle lettere trasformano l'equazione in una identità prendono il nome di **RADICI dell'equazione**. Esse sono anche dette **SOLUZIONI dell'equazione**.

Esempio:

La radice dell'equazione è 3.

Si è soliti dire che le **RADICI** *soddisfano o verificano l'equazione data*.

Una equazione, oltre alle incognite può contenere delle **ALTRE LETTERE**: esse vengono considerate come dei **NUMERI FISSI** e prendono il nome di **COSTANTI**.

In genere si indicano con

x, y, z, ...	**le incognite**
a, b, c, ...	**le costanti**

Mentre si chiamano **TERMINI NOTI** i termini che **NON CONTENGONO le INCOGNITE**.

Esempi:

$$ax + 2x = 7$$

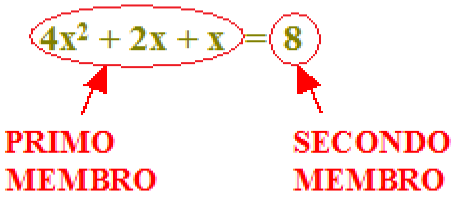
x = incognita

a = costante

7 = termine noto.

In una equazione l'**ESPRESSIONE** scritta a **SINISTRA del segno =** prende il nome di **PRIMO MEMBRO**, mentre quella scritta a **DESTRA del segno =** prende il nome di **SECONDO MEMBRO**.

PRIMO MEMBRO = SECONDO MEMBRO.



Un'**equazione** che ammette un **NUMERO LIMITATO di RADICI** si dice **DETERMINATA**.

Esempi:

$x + 1 = 2$	**radice $x = 1$**
$x^2 = 9$	**radice $x = 3$**
$x - 5 = 0$	**radice $x = 5$**

Un'**equazione** che non ammette **NESSUNA SOLUZIONE** si dice **IMPOSSIBILE**. In questi casi, quindi, non esiste *nessun valore che sostituito all'incognita la trasformi in una identità*.

Esempi:

$y + 1 = y - 1$	non esiste nessun valore che, sostituito alla y, fa sì che sommando ad y il valore 1 otteniamo il valore di y - 1.
$x^2 = - 4$	nessuna potenza di indice pari può essere un numero negativo.

Un'equazione che ammette un **NUMERO INFINITO di SOLUZIONI** si dice **INDETERMINATA**.

Esempi:

$3x - 2 = 3x -2$	E' evidente che tale equazione è verificata qualunque valore diamo alla x.

2. EQUAZIONI DI I GRADO AD UNA INCOGNITA

Un'equazione che **CONTIENE UNA SOLA LETTERA** della quale vogliamo trovare il valore si dice **EQUAZIONE ad UNA SOLA INCOGNITA**.

Esempi:

$y + 1 = 3$	la sola incognita presente è la **y**
$4x^2 + 3x + 2 =0$	la sola incognita presente è la **x**
$3x + 2y = 7$	questa equazione è **A DUE INCOGNITE**: la **x** e la **y**

Un'equazione si dice **DI PRIMO GRADO** quando il **GRADO MASSIMO delle sue incognite è 1**, cioè quando le incognite compaiono tutte con esponente **1**.

Una **EQUAZIONE di PRIMO GRADO** si dice anche **EQUAZIONE LINEARE**.

Esempi:

x + 5 = 8	equazione di primo grado perché la **x** compare con esponente **1**
$4x^2 + 3x + 2 = 0$	questa equazione è **DI SECONDO GRADO**: la **x** compare con esponente **2**

3. **EQUAZIONI EQUIVALENTI**

Due **EQUAZIONI** si dicono **EQUIVALENTI** quando **AMMETTONO le STESSE SOLUZIONI**.

In altre parole se abbiamo **DUE EQUAZIONI** aventi le **STESSE INCOGNITE** e **TUTTE LE SOLUZIONI DELLA PRIMA SONO ANCHE SOLUZIONI DELLA SECONDA** e **VICEVERSA**, le due **EQUAZIONI** sono **EQUIVALENTI**.

Quando dobbiamo trovare le radici di un'equazione cerchiamo di **TRASFORMARE** l'equazione data in una equivalente che sia più semplice rispetto alla precedente. Poi trasformiamo l'equazione trovata in un'altra equivalente a quella data anch'essa più semplice, fino a giungere ad un'equazione della quale riusciamo a trovare facilmente la soluzione.

Per **TRASFORMARE un'EQUAZIONE** in una un'altra **EQUIVALENTE** a quella data si applicano i **PRINCIPI DI EQUIVALENZA.**

4. **PRINCIPI DI EQUIVALENZA**

Per risolvere le equazioni vengono in nostro aiuto i **PRINCIPI di EQUIVALENZA delle EQUAZIONI**.

Tali principi ci permettono di trasformare un'equazione in un'altra **EQUIVALENTE** alla data, ma scritta in maniera più semplice della quale sappiamo trovare la **radice**. Trattandosi di equazioni equivalenti la radice trovata sarà anche radice della equazione di partenza.

I **PRINCIPI DI EQUIVALENZA** sono due:

a) Il **PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA** afferma che **AGGIUNGENDO** ad entrambi i membri di una equazione, uno **STESSO NUMERO** o una **STESSA ESPRESSIONE CONTENENTE L'INCOGNITA**, otteniamo una equazione **EQUIVALENTE** a quella data.

   Vediamo un esempio:

   b) **4x = 4**.

   E' intuitivo comprendere che la **radice** è **1**.
   Ora aggiungiamo a primo e a secondo membro il valore **-4**. Avremo:

   4x - 4 = 4 - 4.

   Cioè:

   4x - 4 = 0.

Anche qui, intuiamo facilmente che la **radice** è di nuovo **1**. Infatti:

$$4\,(1) - 4 = 0.$$

La prima conseguenza, che dunque, possiamo trarre dal **PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA** è che possiamo **TRASPORTARE un TERMINE** di un'equazione **DA UN MEMBRO ALL'ALTRO CAMBIANDOGLI DI SEGNO**.

Infatti, scrivere:

$$4x = 4$$

sommare ad entrambi i membri dell'equazione **-4**

$$4x - 4 = 4 - 4$$

in modo da avere

$$4x - 4 = 0$$

equivale a portare il **4** a primo membro cambiandogli di segno.

Ovviamente noi avremmo potuto aggiungere qualsiasi numero e qualsiasi espressione algebrica, ma abbiamo preferito aggiungere **-4** perché così facendo il secondo membro dell'equazione diventa **0** e la nostra equazione risulta più semplice da risolvere.

Vediamo ora un altro esempio:

$$x + 5 = 5.$$

Anche in questo caso è intuitivo comprendere che la **radice** è **0**.

Ora aggiungiamo a primo e a secondo membro il valore **-5**. Avremo:

$$x + 5 - 5 = 5 - 5.$$

Cioè:

$$x + 0 = 0$$

ovvero

$$x = 0.$$

La **radice** è di nuovo **0**.

Quindi la seconda conseguenza, che possiamo trarre dal **PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA** è che se uno **STESSO TERMINE COMPARE** in **ENTRAMBI i MEMBRI** di un'equazione, esso **PUO' ESSERE SOPPRESSO**.

Infatti, scrivere:

$$x + 5 = 5$$

sommare ad entrambi i membri dell'equazione **-5**

$$x + 5 - 5 = 5 - 5$$

in modo da avere

$$x = 0$$

equivale a sopprimere il **5** a primo membro e secondo membro, così:

$$x + \cancel{5} = \cancel{5}$$

b) Il **SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA** afferma che **MOLTIPLICANDO** o **DIVIDENDO** entrambi i membri di una equazione per uno **STESSO NUMERO** *diverso da zero* o per una **STESSA ESPRESSIONE** che *non possa annullarsi*, si ottiene una equazione **EQUIVALENTE** a quella data.

Vediamo un esempio:

$$-2x = -2.$$

E' intuitivo comprendere che la **radice** è **1**.

Ora moltiplichiamo il primo e il secondo membro per **-1**. Avremo:

$$(-2x)\,(-1) = (-2)\,(-1).$$

Cioè:

$$+2x = +2.$$
Anche qui, intuiamo facilmente che la **radice** è di nuovo **1**.

La prima conseguenza, che dunque, possiamo trarre dal **SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA** è che possiamo **CAMBIARE I SEGNI A TUTTI I TERMINI DI UN'EQUAZIONE** e ottenere una equazione equivalente a quella data.
Infatti, scrivere:
$$-2x = -2$$
moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per **-1**
$$(-2x)\,(-1) = (-2)\,(-1).$$
in modo da avere
$$+2x = +2$$
equivale a cambiare di segno ad entrambi i termini dell'equazione.

Vediamo ora un altro esempio:
$$2x + 4 = 6.$$
E' intuitivo comprendere che la **radice** è **1**.
Ora dividiamo il primo e il secondo membro per **2**. Avremo:
$$(2x + 4)/2 = 6/2.$$
Cioè:
$$2x/2 + 4/2 = 6/2.$$
Ovvero:
$$x + 2 = 3.$$
La **radice** è sempre **1**.

Un'altra conseguenza che, possiamo trarre dal **SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA** è che, se tutti i termini di un'equazione hanno un **FATTORE COMUNE** diverso da zero,**DIVIDENDO** per tale numero si ottiene una equazione equivalente a quella data.

Tale regola è utile per risolvere equazioni del tipo:
$$ax = b$$
dato, dividendo entrambi i termini per **a**, si ha:
$$x = b/a.$$
Vediamo un ultimo esempio:
$$x/8 = 2.$$
La **radice** è **16**.
Ora moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per **8**. Avremo:
$$8\,(x/8) = 8\,(2).$$
$$x = 16.$$

Abbiamo, quindi, trovato un'altra conseguenza che discende dal **SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA**. Se **MOLTIPLICHIAMO** entrambi i membri di un'equazione per un **numero**o per una **espressione** conveniente otteniamo una equazione equivalente a quella data.

Tale regola è utile per risolvere equazioni del tipo:
$$x/a = b$$
dato che sarà moltiplicando entrambi i termini per **a** si ha:
$$x = b\,(a).$$

5. EQUAZIONI RIDOTTE A FORMA NORMALE

Supponiamo di trovarci di fronte ad una equazione del tipo

$$ax = b.$$

Dove **a** e **b** sono delle costanti.

Essa è una **EQUAZIONE di PRIMO GRADO in UNA INCOGNITA**. Infatti, la sola incognita presente è la **x** ed essa compare con grado massimo **1**.

Quando un'equazione di primo grado ad una incognita è scritta in questa forma si dice **RIDOTTA A FORMA NORMALE** .

Esempio:

$$4x + 5 = 0.$$

Quella che abbiamo scritto è un'equazione di primo grado ad una incognita.

Applicando il **PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA** possiamo **PORTARE** il **5** a **SECONDO MEMBRO**, **CAMBIANDOGLI di SEGNO**, e scrivere:

$$4x = -5.$$

Così facendo abbiamo **RIDOTTO** l'equazione **A FORMA NORMALE**.

Vediamo un altro esempio:

$$2x + 3 - 2 = 0.$$

Anche questa è un'equazione di primo grado ad una incognita.

Applicando il **PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA** possiamo **PORTARE +3** e **-2** a **SECONDO MEMBRO**, **CAMBIANDOLO loro il SEGNO**, e scrivere:

$$2x = - 3 + 2.$$

A questo punto eseguiamo la somma algebrica dei due termini a secondo membro e abbiamo:

$$2x = - 1.$$

Anche in questo caso abbiamo **RIDOTTO** l'equazione **A FORMA NORMALE**.

6. COME RISOLVERE UN'EQUAZIONE DI I GRADO AD UNA INCOGNITA

Ricordiamo che:

- le **EQUAZIONI NUMERICHE** sono quelle che, *oltre alle incognite*, contengono **SOLAMENTE NUMERI**;
- le **EQUAZIONI INTERE** sono quelle che **NON** contengono l'**INCOGNITA** a **DENOMINATORE**.

Ad esempio quella che segue è un'**EQUAZIONE NUMERICA INTERA IN UNA INCOGNITA** :

$$\frac{1}{6}(x+8)=\frac{3-2x}{4}+2x-\frac{73}{12}$$

Per risolverla:

1. Si **LIBERA** l'equazione dai **DENOMINATORI**. Per fare ciò dobbiamo **MOLTIPLICARE ENTRAMBI I MEMBRI** dell'equazione per il **MINIMO COMUNE MULTIPLO dei DENOMINATORI**, cioè il minimo comune denominatore.

Nel nostro esempio

m.c.m. (6; 4; 12) = 12.

Quindi moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per **12**.

$$12\cdot\left[\frac{1}{6}(x+8)\right]=\left[\frac{3-2x}{4}+2x-\frac{73}{12}\right]\cdot 12$$

Ovvero:

$$12\cdot\left[\frac{1}{6}(x+8)\right]=\frac{3-2x}{4}\cdot 12+2x\cdot 12-\frac{73}{12}\cdot 12$$

Semplificando avremo:

$$\overset{2}{\cancel{12}}\cdot\left[\frac{1}{\cancel{6}}(x+8)\right]=\frac{3-2x}{\cancel{4}}\cdot\overset{3}{\cancel{12}}+2x\cdot 12-\frac{73}{\cancel{12}}\cdot\cancel{12}$$

Quindi:

$$2\cdot(x+8)=(3-2x)\cdot 3+24x-73$$

2. Si eseguono le eventuali **POTENZE** e i **PRODOTTI** indicati.

$$2x+16=9-6x+24x-73$$

3. Si **PORTANO** a **PRIMO MEMBRO** tutti i **TERMINI CHE CONTENGONO L'INCOGNITA** e si portano a **SECONDO MEMBRO** tutti i **TERMINI NOTI**.

Ricordiamo, dal primo principio di equivalenza, che quando portiamo un termine da un membro all'altro dobbiamo cambiare di segno.

$$2x+6x-24x=9-16-73$$

4. Si **RIDUCONO i TERMINI SIMILI**, cioè si sommano tra loro i termini che contengono le incognite **(2x+6x-24x)** e si sommano tra loro i termini noti **(9-16-73)**.

$$-16x=-80$$

5. A questo punto la nostra equazione è **RIDOTTA A FORMA NORMALE** e non ci resta che trovare l'incognita. Per fare ciò si **DIVIDE il TERMINE NOTO** per il **COEFFICIENTE dell'incognita**.

$$x=\frac{-80}{-16}=+5$$

Abbiamo, così, risolto la nostra equazione.

7. VERIFICA DELLA SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE

Una volta che abbiamo trovato la **RADICE** di una equazione può essere utile effettuare una **VERIFICA** per vedere se la **SOLUZIONE** trovata è quella esatta.

Per effettuare la **VERIFICA** è sufficiente **SOSTITUIRE**, nell'equazione di partenza, **all'INCOGNITA il VALORE TROVATO** ed eseguire tutte operazioni indicate.

Se la radice trovata è quella esatta la nostra equazione si trasformerà in una **IDENTITA'NUMERICA**.

Torniamo all'esempio visto nella precedente. Data l'equazione di partenza, ovvero:

$$\frac{1}{6}(x+8)=\frac{3-2x}{4}+2x-\frac{73}{12}$$

vogliamo verificare che effettivamente **5** sia la sua **radice**.

Sostituiamo alla **x** il valore **5** ed eseguiamo le operazioni indicate. Avremo:

$$\frac{1}{6}(x+8)=\frac{3-2x}{4}+2x-\frac{73}{12}$$

$$\frac{1}{6}(5+8)=\frac{3-2\cdot5}{4}+2\cdot5-\frac{73}{12}$$

$$\frac{1}{6}\cdot13=-\frac{7}{4}+10-\frac{73}{12}$$

$$\frac{13}{6}=-\frac{7}{4}+10-\frac{73}{12}$$

$$\frac{13}{6}=\frac{-21+120-73}{12}$$

$$\frac{13}{6}=\frac{26}{12}$$

Semplificando il termine a secondo membro, dividendo numeratore e denominatore per 2, avremo un'identità, ovvero:

$$\frac{13}{6} = \frac{13}{6}$$

La soluzione da noi trovata, quindi, è quella che soddisfa l'equazione data.

8. EQUAZIONI DETERMINATE, INDETERMINATE, IMPOSSIBILI

Abbiamo visto che un'equazione può ammettere:

- un **NUMERO LIMITATO di RADICI** e in questo caso si dice **DETERMINATA**;
- **NESSUNA SOLUZIONE** e allora si dice **IMPOSSIBILE**;
- un **NUMERO INFINITO di SOLUZIONI** e in questo caso si dice **INDETERMINATA**.

Vediamo di approfondire ulteriormente questi concetti.

Sappiamo che un'**EQUAZIONE RIDOTTA A FORMA NORMALE** assume la forma

$$ax = b.$$

Inoltre sappiamo che, per il **SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA** delle equazioni la nostra equazione può essere risolta **DIVIDENDO** entrambi i membri per **a** in modo da avere:

$$x = b/a.$$

Dove **a** e **b** sono delle **COSTANTI**.

- Se **a** *è* ***diverso da zero*** ($a \neq 0$)

la nostra equazione avrà come soluzione

$$x = b/a.$$

Essa, dunque, sarà una equazione **DETERMINATA**.

- Se **a** *è* ***uguale a zero*** ($a = 0$)

la nostra equazione sarà

$$0 \cdot x = b.$$

Il risultato della nostra equazione dipenderà dal valore di **b**.

Se $b \neq 0$

la nostra equazione sarà **IMPOSSIBILE** dato che non esiste nessun numero che moltiplicato per zero ci dà un valore diverso da zero.

Se, invece **b = 0**

la nostra equazione sarà **INDETERMINATA** perché stiamo cercando un valore che, moltiplicato per zero dà zero e ciò accade per tutti i valori che potremmo andare a sostituire alla nostra **x**.

Quindi, ricapitolando:

Equazione: ax = b	
Se a ≠ 0	**Equazione DETERMINATA - Radice: b/a**
Se a = 0 **e** **b ≠ 0**	**Equazione IMPOSSIBILE**
Se a = 0 **e** **b = 0**	**Equazione INDETERMINATA**

Per completezza diciamo che se

a ≠ 0 e **b = 0**

la nostra equazione è determinata e la radice è **0**. Infatti sarebbe:

x = 0/a = 0.

9. EQUAZIONI FRAZIONARIE NUMERICHE

Le **EQUAZIONI FRAZIONARIE NUMERICHE** contengono l'incognita al denominatore e tutti i coefficienti sono numerici.

Esempio:

$$\frac{4}{x+1} = \frac{3}{x+2}$$

Questo tipo di equazioni si risolvono come le **equazioni numeriche intere**. Quindi:

1. Si **LIBERA** l'equazione dai **DENOMINATORI**.
2. Si eseguono le eventuali **POTENZE** e i **PRODOTTI** indicati.
3. Si **PORTANO** a **PRIMO MEMBRO** tutti i **TERMINI CHE CONTENGONO L'INCOGNITA** e si portano a **SECONDO MEMBRO** tutti i **TERMINI NOTI**.

4. Si **RIDUCONO i TERMINI SIMILI**, cioè si sommano tra loro i termini che contengono le incognite e si sommano tra loro i termini noti.

5. Una volta che l'equazione è **RIDOTTA A FORMA NORMALE** non resta che **DIVIDERE il TERMINE NOTO** per il **COEFFICIENTE dell'incognita**.

Di queste fasi l'unica che presenta delle caratteristiche particolari è la prima.

Le frazioni algebriche hanno significato solo se il denominatore non si annulla. Quindi per procedere alla soluzione dell'equazione occorre determinare le **C.E**. (Condizioni di Esistenza)delle frazioni.

Cerchiamo di capire meglio questo concetto tornando all'esempio precedente.

I denominatori sono rispettivamente

(x+1) e (x+2).

Essi si annullano rispettivamente per:

(x+1) = 0 ovvero x = -1 e **(x+2) = 0 ovvero x = -2**.

Dunque i denominatori in questioni saranno *diversi da zero* quando:

x≠-1 e x≠-2.

Ovvero **C.E.: x≠-1 e x≠-2**.

Ora procediamo col risolvere la nostra espressione nei modi consueti:

$$\frac{4}{x+1}=\frac{3}{x+2}$$

$$(x+2)\cdot 4=3\cdot(x+1)$$

$$4x+8=3x+3$$

$$4x-3x=3-8$$

$$x=-5$$

Una volta trovata la radice dobbiamo verificare che essa non sia uno dei valori che annullano l'espressione per la quale abbiamo moltiplicato i due membri dell'equazione.

Poiché la soluzione trovata non è né **-1**, né **-2**, essa rappresenta la **radice della nostra equazione**.