Approfondimento

Trasformazioni adiabatiche: dimostrazioni

Supponendo nullo lo scambio di calore, l'equazione fondamentale della termodinamica diventa:

$$0 = u_2 - u_1 + l$$

e da questa:

$$l = -(u_2 - u_1) \tag{1}$$

che, ricordando la (1) dall'approfondimento online relativo alle trasformazioni isometriche diventa:

$$l = -c_v \cdot (T_2 - T_1) \tag{2}$$

da cui risulta un lavoro negativo, in accordo con l'ipotesi fatta che esso venga somministrato dall'esterno in seguito a un aumento della pressione. Per ricavare l'equazione caratteristica dell'adiabatica, scriviamo la (2) in forma differenziale:

$$\mathrm{d}l = -c_v \cdot \mathrm{d}T$$

ovvero:

$$\mathrm{p} \cdot \mathrm{d}v = -c_v \cdot \mathrm{d}T \tag{3}$$

e differenziamo l'equazione di stato $p \cdot v = R \cdot T$ ricavando:

$$p \cdot \mathrm{d}v + v \cdot \mathrm{d}p = R \cdot \mathrm{d}T$$

da cui:

$$\mathrm{d}T = \frac{p \cdot \mathrm{d}v + v \cdot \mathrm{d}p}{R}$$

che sostituita nella (3) ci conduce alla relazione:

$$p \cdot \mathrm{d}v = -c_v \cdot \frac{p \cdot \mathrm{d}v + v \cdot \mathrm{d}p}{R} \tag{4}$$

La relazione (17.5) del testo che lega insieme i due calori specifici, $c_p = c_v + R$, si può anche scrivere: $c_p - c_v = R$
mettendo in evidenza c_v si ottiene:

$$c_v \cdot \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) = R$$

e ponendo, per definizione:

$$\frac{c_p}{c_v}=\gamma \tag{5}$$

si ottiene:

$$c_v\cdot(\gamma-1)=R$$

e da questa:

$$\frac{c_v}{R}=\frac{1}{\gamma-1} \tag{6}$$

Sostituendo nella (4):

$$p\cdot \mathrm{d}v=-\frac{p\cdot \mathrm{d}v+v\cdot \mathrm{d}p}{\gamma-1}$$

da cui:

$$p\cdot(\gamma-1)\cdot \mathrm{d}v=-p\cdot \mathrm{d}v-v\cdot \mathrm{d}p$$

e semplificando:

$$\gamma\cdot p\cdot \mathrm{d}v=-v\cdot \mathrm{d}p$$

e dividendo ambo i membri dell'uguaglianza soprascritta per il prodotto $p\cdot v$:

$$\gamma\cdot\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

Integrando fra i due punti estremi della trasformazione:

$$\gamma\cdot\int_1^2\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_1^2\left(-\frac{\mathrm{d}p}{p}\right)$$

si ottiene:

$$\gamma\cdot\ln\frac{v_2}{v_1}=\ln\frac{p_1}{p_2}$$

relazione in termini logaritmici che è soddisfatta solo se è soddisfatta quella esistente fra i rispettivi valori numerici:

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma}=\frac{p_1}{p_2}$$

che viene comunemente scritta nella forma più consueta:

$$p_1\cdot v_1^{\gamma}=p_2\cdot v_2^{\gamma} \tag{7}$$

Poiché la (7) è valida per qualsiasi punto intermedio della trasformazione considerata, l'equazione caratteristica dell'adiabatica assume la forma:

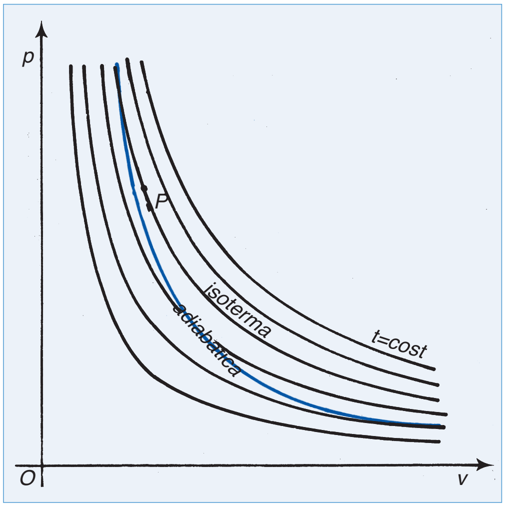
$$p\cdot v^{\gamma}=\mathrm{cost} \tag{8}$$

nella quale l'esponente γ che vi appare è espresso dal rapporto fra il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante, rapporto che per la maggior parte dei gas a molecola biatomica (O_2, H_2, N_2, e con buona approssimazione, anche per l'aria) assume il valore medio $\gamma\cong 1{,}41$, mentre per altri gas può essere rilevato dalla TABELLA N. **16.1** del testo.

In accordo con la relazione (8), nel piano p - v , la compressione adiabatica è rappresentata da una iperbole non equilatera, dovendo, nello stato finale, aumentare la temperatura; essa quindi sarà disposta in modo da tagliare il fascio delle isotermiche (iperboli equilatere) nel senso dell'aumento delle temperature (FIGURA **1**).

La trasformazione può avvenire in modo del tutto analogo in senso inverso, ove si supponga di diminuire l'entità della pressione iniziale del gas; il volume di esso tenderà ad aumentare e la temperatura — non potendo assorbire calore dall'esterno — subirà una riduzione.

Si parlerà, in tal caso, di una **espansione adiabatica** e la sua rappresentazione nel piano p - v coincide con quella di FIGURA **1** salvo il verso; nel primo caso la trasformazione avviene da destra verso sinistra (compressione) ossia verso i volumi minori e nel secondo caso (espansione) in verso opposto.



1 Trasformazione adiabatica nel diagramma p-v

La trasformazione adiabatica riveste somma importanza nello studio delle macchine termiche poiché rappresenta — seppur con una certa approssimazione — la fase utile di lavoro sviluppato dalle macchine stesse; se ci riferiamo, per esempio, a un motore a scoppio, questa fase avviene in seguito alla spinta esercitata dai gas combusti sulla faccia superiore dello stantuffo, che si sposta verso il basso (compiendo lavoro contro le forze esterne) generando, nella parte superiore del cilindro, volumi crescenti, che a loro volta, provocano una riduzione della pressione esercitata dal gas. Si potrebbe comunque obbiettare che l'espansione adiabatica presuppone l'assoluto isolamento termico del cilindro, in modo da rendere nulli gli scambi di calore con l'esterno; questa ipotesi potrebbe essere verificata nella pratica solo se la fase di espansione avvenisse con estrema rapidità e non fosse prevista alcuna forma di raffreddamento dei cilindri. Poiché è noto che tutti i motori a combustione interna sono provvisti di un impianto per la refrigerazione dei cilindri, la fase di espansione non sarà rigorosamente adiabatica, ma sarà una trasformazione con sottrazione di calore, (intermedia cioè fra l'adiabatica e l'isotermica) e tanto più prossima all'adiabatica quanto minore è il prelievo di calore effettuato dall'esterno. Con miglior approssimazione, potrebbe essere considerata adiabatica la fase di espansione che si verifica nelle macchine a vapore, ove, in considerazione della più bassa temperatura del fluido operante, non esistono sistemi di raffreddamento della motrice; l'ipotesi sarebbe pienamente rispettata se non si manifestassero nell'interno della macchina dissipazioni di energia per urti, attriti e deviazioni della vena fluida, dissipazioni che si traducono in sviluppo di calore che ovviamente rimane incluso nel fluido operante. Nelle macchine di questa categoria, la fase di espansione risulterà perciò a introduzione di calore per cui nello stato fisico finale la temperatura risulterà maggiore del valore teorico che si otterrebbe con una espansione rigorosamente adiabatica.

La (8) non è l'unica equazione che caratterizzi una trasformazione adiabatica; dall'equazione di stato, si ricava infatti:

$$p = \frac{R \cdot T}{v}$$

e sostituendo nella (8):

$$\frac{R \cdot T}{v} \cdot v^{\gamma} = \text{cost}$$

portando poi la costante R al secondo membro:

$$T \cdot v^{\gamma-1} = \text{cost} \tag{9}$$

si ottiene una seconda espressione della (8) in funzione delle variabili T e v anziché di v e p ; in modo del tutto analogo, ricavando dall'equazione di stato:

$$v = \frac{R \cdot T}{p}$$

e sostituendo nella (8):

$$p \cdot \left(\frac{R \cdot T}{p} \right)^{\gamma} = \text{cost}$$

si ottiene:

$$\frac{T^{\gamma}}{p^{\gamma-1}} = \text{cost}$$

che si scrive più comunemente nella forma:

$$\frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{cost} \tag{10}$$

Anche per il calcolo del lavoro compiuto (o assorbito) dal fluido esistono altre formule derivate da quella principale (2); moltiplicando e dividendo il secondo membro della (2) per la costante R , otteniamo:

$$l = \frac{1}{R} \cdot c_v \cdot \left(R \cdot T_1 - R \cdot T_2 \right)$$

e ricordando la (6):

$$l = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \left(R \cdot T_1 - R \cdot T_2 \right) \tag{11}$$

ossia:

$$l = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \left(T_1 - T_2 \right)$$

e ponendo in evidenza il termine T_1 si ricava:

$$l = \frac{R \cdot T_1}{\gamma - 1} \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

dalla quale, ricordando l'equazione di stato, e la (9):

$$l = \frac{p_1 \cdot v_1}{\gamma - 1} \cdot \left(1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma-1} \right) \tag{12}$$

oppure dalla (10):

$$l = \frac{p_1 \cdot v_1}{\gamma - 1} \cdot \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \tag{13}$$

si ottengono due relazioni che, come vedremo in seguito, sono comodamente adattabili anche alle trasformazioni politropiche. Per quanto concerne le variazioni di entropia, è facile riconoscere che, in una adiabatica, è per ipotesi $\mathrm{d}q = 0$, e perciò è anche $\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}q}{T} = 0$

per cui, ne segue: $s = \text{costante}$